3B

УДК 517.997.56:669.18.046.5:536.42

***Н.А. Володин*[1]*, В.К. Толстых*[2]*, Ю.В. Береговых*[1]**
[1]Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, Украина
nvolodin@yandex.ru, dos-sent@yandex.ru
[2]Донецкий национальный университет, Украина
tvk@dongu.donetsk.ua

Градиент критерия качества оптимизации в задаче управления системой с квазилинейным параболическим уравнением

Рассматривается определение градиента целевого функционала в задаче оптимизации системы, описываемой квазилинейным параболическим дифференциальным уравнением в цилиндрической системе координат. Найдено аналитическое выражение для расчета градиента неявно заданного функционала. Градиент выражается через решение соответствующего линейного уравнения параболического типа.

Пусть в цилиндрической области $\Sigma = [0,R]*[0,Z]$ функция $f(r,z)$ удовлетворяет квазилинейному параболическому уравнению

$$\alpha(f)\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\beta(f)\frac{\partial f}{\partial r}\right) = 0, \quad (r,z) \in \Sigma \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{\substack{r=0\\ 0<z<Z}} = 0, \quad \left. f\right|_{\substack{0\le r\le R\\ z=0}} = f_0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{\substack{r=R\\ 0<z<z_1}} = -\gamma(f - f_1),$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{S} = u(z), \quad S = \{r, z : r = R, z_1 < z < Z\}. \tag{2}$$

Здесь $\alpha(f)$, $\beta(f)$ – непрерывные или кусочно-непрерывные функции, γ, f_0, f_1 – константы, $0 < z_1 < Z$, $z_1 \in (0, Z)$.

Это уравнение характерно для задач оптимизации установившихся процессов нагрева или охлаждения бесконечного цилиндрического стержня с неоднородными, зависящими от температуры, характеристиками материала стержня. Для подобных задач характерны целевые функционалы, состоящие из многих критериев, отражающих состояние различных процессов внутри объекта.

Задачу оптимального управления сформулируем следующим образом. Необходимо в граничном условии (2) найти гладкую функцию $u(z)$, доставляющую минимум многокритериальному целевому функционалу

$$J(u) = \chi_0 \int_0^R\int_0^Z \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \theta(r - r_2)\theta(z - z_1) r\,dr\,dz + \chi_1 \int_0^R\int_0^Z \theta(f - f_2)\theta(z - z_1) r\,dr\,dz +$$

$$+ \chi_2 \int_0^R\int_0^Z \left(\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right)^{1/2} \theta(r - r_1)\,\theta(z - z_2) r\,dr\,dz + \chi_3 \int_0^R I_F(f)\,dr, \tag{3}$$

где $\chi_0 - \chi_3$ – весовые коэффициенты, определяющие степень влияния того или иного критерия на функционал (3), $r_1 \in (0, R)$, $r_2 \in (r_1, R)$, $z_2 \in (z_1, Z)$, I_F – штрафная функция. Тета-функции определяют области задания того или иного функционала.

Конкретный вид штрафной функции может быть произвольным. Выбор функции I_F – это дело вкуса и интуиции каждого исследователя. Различают три типа штрафных функций – внешние, внутренние и смешанные. Первые из них должны возрастать (штрафовать решение) при нарушении ограничения. Вторые же возрастают при приближении к границе допустимого множества состояний и достигают бесконечно большой величины на границе. Смешанные штрафы обеспечивают конечное возрастание функции I_F при приближении и при переходе через границу допустимого множества [1-3].

Будем использовать внешнюю штрафную функцию, которая должна возрастать (штрафовать решение) при нарушении ограничения. Внешний штраф определяется в виде функции:

$$I_F = \begin{cases} (f - f_{ad})^2, f > f_{ad}; \\ 0, \qquad f \le f_{ad}, \end{cases} \tag{4}$$

где f_{ad} – максимально допустимое значение функции $f(r, Z)$.

Наиболее эффективными методами оптимизации являются прямые экстремальные методы [4], [5]. Они используют градиент целевого функционала для итерационных коррекций искомого управления.

В данной работе получим аналитическое выражение градиента целевого функционала $J(u)$. Методом определения градиента в настоящей работе является модернизированный классический метод множителей Лагранжа [4].

Уравнение (1) для более компактных дальнейших преобразований с целью получения градиента ∇J удобно записать в виде:

$$\alpha(f)\frac{\partial f}{\partial z} - div\big(\beta(f)\, grad\, f\big) = 0, \qquad (\text{r}, \text{z}) \in \Sigma. \tag{5}$$

Граничные условия (2) имеют вид:

$$grad\, f\Big|_{\substack{r=0\\0<z<Z}} = 0, \qquad f\Big|_{\substack{0\le r\le R\\z=0}} = f_0, \quad grad\, f\Big|_{\substack{r=R\\0<z<z_1}} = -\gamma\,(f - f_1),$$
$$grad\ \ f\big|_S = u\,. \tag{6}$$

Теперь перейдем к определению градиента ∇J. Уравнение (5), линеаризованное относительно $\delta f \in \Omega(\Sigma)$, имеет вид:

$$e \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial f}\delta f \frac{\partial f}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \delta f}{\partial z} - div\left(\frac{\partial \beta}{\partial f}\delta f\, grad\, f - \beta\, grad\, \delta f\right) = 0 \ \in \Omega(\Sigma). \tag{7}$$

Граничные условия принимают вид:

$$grad\,\delta f\Big|_{\substack{r=0\\0<z<Z}} = 0, \qquad \delta f\Big|_{\substack{0\le r\le R\\z=0}} = 0, \quad grad\,\delta f\Big|_{\substack{r=R\\0<z<z_1}} = -\gamma\,\delta f,$$
$$grad\,\delta f\big|_S = \delta u. \tag{8}$$

Линеаризованный функционал (3) принимает вид:

$$\delta J=\int_0^R\int_0^Z 2\left[\chi_0\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\partial f}{\partial r}\right)\theta(r-r_2)+r\frac{\partial f}{\partial r}\delta(r-r_2)-\right.$$

$$\left.-\chi_1\delta(f-f_2)\right]\theta(z-z_1)\delta f\,dr\,dz+$$

$$+\chi_2\int_0^R\int_0^Z\left[r\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(B\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(B\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]+\left[B\frac{\partial f}{\partial r}\left(\delta(r-r_2)+\delta(r-r_1)\right)\right]\theta(z-z_1)\delta f\,dr\,dz+\right.$$

$$+\int_{z_1}^Z\left[2\chi_0 R\frac{\partial f}{\partial r}-B\chi_2\,\theta(r-r_2)\,\theta(r-r_1)\frac{\partial f}{\partial r}\right]\delta f\,dz-$$

$$-\int_0^R B\chi_2\left[\frac{\partial f}{\partial r}\theta(r-r_2)\theta(r-r_1)+\chi_3 I'_F\right]\delta f\,dr=$$

$$=\left(2\left[\chi_0\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\partial f}{\partial r}\right)\theta(r-r_2)\right]\theta(z-z_1),\delta f\right)_{\Omega(\Sigma)}+$$

$$+\left(2\left[r\frac{\partial f}{\partial r}\delta(r-r_2)-\chi_1\delta(f-f_2)\right]\theta(z-z_1),\delta f\right)_{\Omega(\Sigma)}+$$

$$+\left(\chi_2\left[r\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(B\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(B\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\right]\theta(z-z_1),\delta f\right)_{\Omega(\Sigma)}+$$

$$+\left(\chi_2\left[B\frac{\partial f}{\partial r}\left(\delta(r-r_2)+\delta(r-r_1)\right)\right]\theta(z-z_1),\delta f\right)_{\Omega(\Sigma)}+$$

$$+\left(\left[2\chi_0 R\frac{\partial f}{\partial r}-B\chi_2\theta(r-r_2)\theta(r-r_1)\frac{\partial f}{\partial r}\right],\delta f\right)_{\Omega(S)}+$$

$$+\left(B\chi_2\frac{\partial f}{\partial r}\theta(r-r_2)\theta(r-r_1)+\chi_3 I'_F,\delta f\right)_{\Omega(S')},\qquad(9)$$

где

$$B=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]^{-1/2},$$

а производная штрафной функции (4) имеет вид:

$$I'_F=\begin{cases}2(f-f_{ad}), & f>f_{ad};\\ 0, & f\le f_{ad}.\end{cases}\qquad(10)$$

Для отображения линеаризованного уравнения (7) в пространство R введем линейный функционал $h\in\Omega(\Sigma)$. Умножим скалярно данный функционал на уравнение (7):

$$(h,e)_{\Omega(\Sigma)}=\int_0^R\int_0^Z hedrdz=0\quad\in R.\qquad(11)$$

Преобразуем данное выражение к виду скалярного произведения относительно вариации δf . Для этого необходимо преобразовать следующие слагаемые:

$$h\alpha \frac{\partial \delta f}{\partial z} = \frac{\partial h\alpha\delta f}{\partial z} - \alpha \frac{\partial h}{\partial z}\delta f;$$

$$hdiv\left(\frac{\partial \beta}{\partial f} grad\, f\, \delta f \right) = div\left(h\frac{\partial \beta}{\partial f}\delta f\, grad\, f \right) - grad\, h\, grad\, f\, \frac{\partial \beta}{\partial f}\delta f;$$

$$hdiv(\beta\, grad\, \delta f) = div(h\beta\, grad\, \delta f) - div(\beta\, grad\, h\delta f) + div(\beta\, grad\, h)\delta f.$$

Полученные дополнительные слагаемые, содержащие оператор дивергенции, в соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса легко интегрируются по r и по z в выражении (11). Окончательно, с учетом (8), выражение (11) принимает вид:

$$(h,z)_{\Omega(\Sigma)} = \int_0^R\int_0^Z \left[-\alpha\frac{\partial h}{\partial z} + h\frac{\partial \alpha}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\beta\frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial f}\frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r} - A \right]\delta f\, dr\, dz +$$

$$+ \int_0^{z_1}\left[h\gamma + \frac{\partial h}{\partial r} \right]\delta f\, dz + \int_{z_1}^{Z}\left[-h\delta u + \frac{\partial h}{\partial r}\delta f \right]dz + \int_0^R [h\alpha + \chi_3 I'_F]\delta f\, dr, \qquad (12)$$

где

$$\mathrm{A} = \left\{ \theta(\mathrm{r}-\mathrm{r}_1)\,\theta(\mathrm{r}-\mathrm{r}_2)\mathrm{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(B\frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(B\frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \right\} + B\frac{\partial f}{\partial r}\left(\delta(r-r_1) + \delta(r-r_2)\right) +$$

$$+ 2\chi_0\left[\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \right)\theta(r-r_2) + r\frac{\partial f}{\partial r}\delta(r-r_2) \right].$$

Теперь можно объединить выражение (12) с линеаризованным функционалом (9). Для того, чтобы избавиться от компоненты градиента ∇J , принадлежащей сопряженному пространству состояний Ω , потребуем:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\beta\frac{\partial h}{\partial r} \right) + \alpha\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial \alpha}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial z}h + A = 0, \qquad (13)$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{\substack{r=0\\ z_1<z<Z}} = 0, \quad \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{\substack{r=R\\ z_1<z<Z}} = -\left(2\chi_2 + B\chi_1\theta(r-r_2)\theta(r-r_1)\right)\frac{\partial f}{\partial r},$$

$$h\Big|_{\substack{0<r<R\\ z=Z}} = -\frac{B\chi_2\dfrac{\partial f}{\partial z}\theta(r-r_2)\theta(r-r_1)}{\alpha} - \frac{2\chi_3}{\alpha}\left(f - f_{\max}\right). \qquad (14)$$

При этом вариация целевого функционала (3) принимает вид:

$$\delta J = -\int_S h\delta u dz = (\nabla J, \delta u)_{\Omega(S)}, \qquad (15)$$

откуда следует, что градиент – это функция

$$\nabla J = -h \text{ на } S. \qquad (16)$$

Градиент (16) целевого функционала (3) находится через решение h линейной сопряженной задачи (13) с граничными условиями (14). Очевидно, что данная задача так же имеет эллиптический тип, как и исходная (1).

Таким образом, в работе найдено аналитическое выражение для расчета градиента ∇J от неявно заданного функционала $J(u)$ для задачи оптимального управления. Градиент ∇J выражается через решение соответствующего линейного уравнения того же типа, что и исходное уравнение.

Литература

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
2. Nocedal J. and Wright S.J. Numerical Optimization. – Springer-Verlag: New York, 1999.
3. Kelly C.T. Iterative Methods for Optimization. – SIAM: Philadelphia, 1999.
4. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами. – Донецк: «Юго-Восток», 1997. – 177 с.
5. Толстых В.К. Эффективный метод оптимизации физических процессов // Инженерно-физический журнал. – 2003. – Т. 76, № 2. – С. 160-162.

М.О. Володін, В.К. Толстих, Ю.В. Береговиx

Градієнт критерію якості оптимізації у завданні керування системою з квазілінійним параболічним рівнянням

Розглядається визначення градієнта цільового функціонала у завданні оптимізації системи, яка описується квазілінійним параболічним диференціальним рівнянням. Отримано аналітичний вираз для розрахунку градієнта неявно заданого функціонала. Градієнт виражається через вирішення відповідного лінійного рівняння параболічного типу.

N.A. Volodin, V.K. Tolstykh, Yu.V. Beregovikh

Gradient of Quality Optimization Criterion in the Task of Control in the System Control Problem with Quasilinear Parabolic Equalization

Determination of gradient of having a special purpose functional is examined in the task of optimization of the system, described parabolic differential equalization. Analytical expression is found for the calculation of gradient of set functional. A gradient is expressed through the decision of the proper linear equalization of parabolic type.

Статья поступила в редакцию 10.07.2008.